Spezialfall :

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig mit einer lokalen Lipschitz Bedingung bzgl. $y \in \mathbb{R}^n$ und $\Psi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die **maximale Lösung** des AWP's

$$\Psi'(x) = f(x, \Psi(x)),\ \Psi(a) = \eta.$$

Seien $\alpha < \beta$ die Grenzen von I. Dann gilt :

i) $\alpha = -\infty$ **oder**

ii) $\boxed{\alpha > -\infty}$: In diesem Fall ist $\lim\limits_{x \downarrow \alpha} \left|\Psi(x)\right| = \infty$

iii) $\beta = \infty$ **oder**

iv) $\boxed{\beta < \infty}$: In diesem Fall ist $\lim\limits_{x \uparrow \beta} \left|\Psi(x)\right| = \infty$.

5) Falls f nur stetig ist, kann man noch lokale Existenz beweisen, hat aber keine Eindeutigkeit. (**Satz von Peano**)

6) Man kann die Größe von ε genau ausrechnen. Das ergibt unter Umständen globale Existenzsätze. (vgl. Zusatz zu Satz 22.2)

Lektion 19

Beweis :

Wir beginnen mit einer Umformulierung des Problems

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Interfall mit $a \in I, \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Dann gilt :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \varphi(a) & = & \eta \\ \varphi'(x) & = & f(x, \varphi(x)),\ x \in I \end{array} \right\} \quad \text{“Anfangswertproblem”}$$

$$\overset{\text{Hauptsatz}}{\Longleftrightarrow} \quad \varphi(x) = \eta + \int_a^x f(t, \varphi(t))\, dt,\ \ x \in I \quad \text{“Integralgleichung”}$$

$$\Longleftrightarrow \quad T(\varphi) = \varphi \qquad (*) \qquad \text{“Fixpunktproblem”}$$

mit dem Opteraror $T(\varphi)(x) := \eta + \int_a^x f(t, \varphi(t))\, dt,\ x \in I.$

Nun richten wir "alles" so ein, dass wir den Fixpunktsatz angewenden können :

Sei $r > 0$ so, dass

$$V := [a - r, a + r] \times \overline{B}_r(\eta) \subset G$$

und f auf V Lipschitz ist mit Konstante $L > 0$. Dann gilt

$$V \text{ kompakt, } f \text{ stetig} \Longrightarrow M := \sup_V |f| < \infty.$$

Sei $\varepsilon < r$ noch beliebig, $I := [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Setze nun :

$$\begin{aligned} X &:= \Big(C^\circ(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty\Big), \\ A &:= \Big\{\varphi \in X : \|\varphi - \eta\|_\infty \leq r\Big\}\ (\|\varphi(t)\|_\infty \\ &:= \sup_{t \in I} |\varphi(t)|), \\ T &: \quad A \longrightarrow X \text{ wie vorhin.} \end{aligned}$$

Beachte :

- A ist *abgeschlossene* Kugel um die konstante Funktion η
- $x \mapsto \eta + \int_a^x f\Big(t, \varphi(t)\Big)\, dt,\ x \in I$, ist nach dem Hauptsatz sogar C^1, also ein Element von X

Zeige :

1) $\underline{T(A) \subset A}$

Sei $\varphi \in A \Longrightarrow \|T(\varphi) - \eta\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} \left| \int\limits_a^x f\Big(t, \varphi(t)\Big)\, dt \right|$

Es ist

$$|t-a| \leq |x-a| \leq \varepsilon < r \text{ und } |\varphi(t) - \eta| \leq r, \text{ da } \varphi \in A$$

$$\Longrightarrow \Big(t, \varphi(t)\Big) \in V, \text{ so dass } \sup_{x\in I} \left| \int\limits_a^x f\Big(t, \varphi(t)\Big)\, dt \right| \leq M \cdot \varepsilon$$

Wir verlangen : $\boxed{M \cdot \varepsilon < r}$ $(*)$

$\Longrightarrow \|T(\varphi) - \eta\| \leq r$, d.h. 1) gilt.

2) T ist (bei passender Wahl von ε) <u>streng kontrahierend</u>

Seien $\varphi, \Psi \in A \overset{s.o.}{\Longrightarrow} \Big(t, \varphi(t)\Big), \Big(t, \Psi(t)\Big) \in A$
$\cancel{V}$ $\forall\, t \in I$.

Also gilt :

$$\|T(\varphi) - T(\Psi)\|_\infty = \sup_{x\in I} \left| \int\limits_a^x \left(f\Big(t, \varphi(t)\Big) - f\Big(t, \Psi(t)\Big)\right) dt \right| \leq L \cdot \varepsilon \cdot \|\varphi - \Psi\|_\infty.$$

In Ergänzung zu $(*)$ sei noch : $\boxed{L \cdot \varepsilon \leq \frac{1}{2}}$

Erfüllt ε all diese Bedingungen, so gibt es $\varphi \in A$ mit $T(\varphi) = \varphi$.
$\varphi : [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist dann die gesuchte Lösung.

$\square$

Zusatz zu 22.2 : (globale Existenz bei linearem Wachstum)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall (auch $I = \mathbb{R}$), $F : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig mit (globaler) partieller Lipschitz-Bedingung bzgl. der $\mathbb{R}^n$-Variablen. Außerdem sei F höchstens linear wachsend in y, d.h. es gibt $a, b \geq 0$ mit

$$\boxed{|F(x,y)| \leq a|y| + b \quad \forall\, (x,y) \in I \times \mathbb{R}^n.}$$

Seien $(x_\circ, \eta) \in I \times \mathbb{R}^n$. Dann gibt es **genau eine** auf ganz I definierte Lösung

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^n \quad \text{des AWP} : y'(x) = F(x, y(x)),\ y(x_\circ) = \eta,\ x \in I$$

Bemerkung :

hier wird also I vorgegeben!

Beweis :

siehe Übung

Anwendung : (s. später)

$y'(x) = A(x) \cdot y(x) + b(x)$ (lineares System)

mit stetiger $(n \times n)$-Matrix A und $b \in C^\circ(I, \mathbb{R}^n)$, $|A(x)|,\ |b(x)| \leq \text{const} < +\infty$

Hier : $F(x,y) = A(x)y + b(x)$

Explizite Gleichungen und Systeme beliebiger Ordnung

Satz 22.1 und Satz 22.2 gelten für explizite Gleichungen und Systeme **1^{ter} Ordnung**.

Daher benutzt man bei der Lösung expliziter Gleichungen k^{ter} Ordnung einen "Trick", mit dessen Hilfe man diese Gleichungen auf Systeme 1^{ter} Ordnung reduziert :

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ *offen*, $f : G \to \mathbb{R}$ *stetig*. Betrachte für y : Intervall $I \longrightarrow \mathbb{R}$ die explizite *Gleichung* k^{ter} Ordnung.

$$(1) \qquad y^{(k)}(x) = f\Big(x, \underbrace{y(x), y'(x) \ldots, y^{(k-1)}(x)}_{\in \mathbb{R}^k}\Big), \quad x \in I.$$

$$\Big(\text{ z.B. } \; y^{(4)}(x) = x^2 y(x) + \Big(y''(x)\Big)^3 + y'''(x)\Big)$$

Definiere mit einer Lösung y die <u>Vektorfunktion</u>

$$Y(x) := \Big(y(x), \ldots, y^{(k-1)}(x)\Big) \quad (\in \mathbb{R}^k)$$

Schreibt man Y in der Form $\Big(Y_\circ, \ldots, Y_{k-1}\Big)$, so gelten die folgenden Gleichungen :

$$(2) \qquad \begin{cases} Y_\circ'(x) &= Y_1(x) \\ Y_1'(x) &= Y_2(x) \\ \quad\vdots & \\ Y_{k-1}'(x) &= f\Big(x, Y(x)\Big), \end{cases}$$

wobei die letzte Zeile offenbar genau der Gleichung (1) entspricht.

Sei
$F : G \longrightarrow \mathbb{R}^k, F(x,Z) := \Big(Z_1, \dots, Z_{k-1}, f(x, Z_\circ, \dots, Z_{k-1})\Big) \in \mathbb{R}^k$ für $Z = \Big(Z_\circ, \dots, Z_{k-1}\Big)$.

Dann liest sich (2) als

$$(2)^* \qquad Y'(x) = F\Big(x, Y(x)\Big).$$

Ergebnis :

$$y(x) \text{ löst } (1) \Longrightarrow Y(x) = \Big(y(x), \dots, y^{(k-1)}(x)\Big) \text{ löst } (2)^*$$

umgekehrt :

Sei $Y(x) = \Big(Y_\circ(x), \dots, Y_{k-1}(x)\Big)$ Lösung von $(2)^*$ mit obigem F.

$\overset{\text{Induktion}}{\Longrightarrow} y(x) :\doteq Y_\circ(x)$ löst (1) $\Big($ zeige : $Y_1 = Y_\circ', Y_2 = Y'^1, \dots\Big)$

Es besteht also eine bijektive Beziehung zwischen den Lösungen von (1) und $(2)^*$.

Außerdem sieht man :

Lösungen Y zu $(2)^*$ sind *eindeutig* (unter vernünftigen Bedingungen zu F), wenn $Y(x_\circ)$ zu einer Zeit $x_\circ$ vorgeschrieben wird. Also müssen bei einer Gleichung k^{ter} Ordnung k Vorgaben $y(x_\circ), y'(x_\circ), \dots, y^{(k-1)}(x_\circ)$ gemacht werden.

Beachte nun noch :

lokale Lipschitz-Bedingung von $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ bzgl. der $\mathbb{R}^k$-Variablen	$\Longleftrightarrow$	$\dots$ $F : G \longrightarrow \mathbb{R}^k$ $\dots$

Mithin gilt dann folgendes Korollar :

Korollar (zu 22.1 und 22.2) :

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ offen, $f : G \to \mathbb{R}$ sei stetig und erfülle bzgl. der $\mathbb{R}^k$-Variablen eine lokale Lipschitz-Bedingung auf G.

a) Seien $\varphi, \Psi : I \to \mathbb{R}$ Lösungen von

$$(*) \quad y^{(k)} = f\Big(\cdot, y, \ldots, y^{(k-1)}\Big)$$

auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Sei $a \in I$ gegeben mit

$$\varphi(a) = \Psi(a),\ \varphi'(a) = \Psi'(a), \ldots, \varphi^{(k-1)}(a) = \Psi^{(k-1)}(a).$$

Dann gilt $\varphi = \Psi$ auf I.

b) Ist $(a, \eta_\circ, \ldots, \eta_{k-1}) \in G$ beliebig, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung

$\varphi : [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \to \mathbb{R}$ von $(*)$ mit $\varphi(a) = \eta_\circ,\ \varphi'(a) = \eta_1, \ldots,\ \varphi^{(k-1)}(a) = \eta_{k-1}$.

$\square$

Bemerkung :

Systeme der Ordnung $k \geq 2$ lassen sich auf Systeme der Ordnung 1 mit entsprechend mehr Komponenten reduzieren $\longrightarrow$ Korrolar anwendbar

Beispiel zur Bemerkung :

Reduktion eines Systems 2^{ter} Ordnung auf ein System 1^{ter} Ordnung

<u>Bewegungsgleichung</u> : („ $\cdot$ " bedeutet $\frac{d}{dt}$)

System 2^{ter} Ordnung :

$$\ddot{X}(t) = F\Big(t, X(t), \dot{X}(t)\Big)$$

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$X : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ (Ortsvektor).}$$

Setze $Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $Y(t) := \Big(X(t), \dot{X}(t)\Big) \implies$

$$(*) \quad \dot{Y}(t) = \Big(Y_4(t), Y_5(t), Y_6(t), F^1\Big(t, Y(t)\Big), F^2\Big(t, Y(t)\Big), F^3\Big(t, Y(t)\Big)$$

wobei $Y = (Y_1, \ldots, Y_6)$, $F = (F^1, F^2, F^3)$.

$(*)$ ist System <u>1^{ter} Ordnung</u> für die Funktion Y mit <u>6 Komponenten</u>.

Eine allgemeine Formulierung des Transformationsprinzips für Systeme der Ordnung k bringt keine neuen Einsichten. Es sollte klar sein, wie es funktioniert.

□

Elementare Lösungsmethoden

Regelfall :

Differentialgleichungen $y^{(k)} = f\Big(\cdot, y, y', \ldots, y^{(k-1)}\Big)$ (+ Anfangsbedingung) lassen sich **nicht elementar** lösen, d.h. es gelingt nicht, Lösungen *in geschlossenen Formeln* $y(x) = \ldots$ anzugeben.

Methode :

Wir haben Picard-Lindelöf; dieser Satz benutzt ein Fixpunktprinzip, d.h. die Lösung y wird konstruiert als Limes einer Folge $\{y_n\}$ mit

$$\begin{aligned} y_\circ &= \text{beliebige Startfunktion,} \\ y_n &= \text{Integraloperator angewendet auf } y_{n-1} \end{aligned}$$

Man kann diese Vorschrift ohne weiteres *numerisch umsetzen* und somit die exakte Lösung y beliebig gut approximieren. *Fehlerabschätzungen* der Form $\|y - y_n\| \cong 1/n$ geben Information, wie weit man noch von der Lösung entfernt ist.

In einigen Spezialfällen lassen sich Lösungen nun doch explizit bestimmen. Die wichtigsten Verfahren sind nachfolgend kurz zusammengestellt.

1) Separation der Variablen

Seien I, J Intervalle $\subset \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

(1) $\boxed{y'(x) = f(x) \cdot g\Big(y(x)\Big)}$ auf I ist zu lösen.

Angenommen, (1) hat Lösung $y(x)$, dann gilt :

Sei G Stammfunktion zu $1/g$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{\Longrightarrow} \quad y'(x)\Big/g\Big(y(x)\Big) = \tfrac{d}{dx}G\Big(y(x)\Big),$$

$$\text{also} \quad \tfrac{d}{dx}G\Big(y(x)\Big) - f(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad G\Big(y(x)\Big) = F(x) + c, \ F \text{ Stammfunktion zu } f,$$

$$c \in \mathbb{R} \text{ konstant.}$$

Nun löse umgekehrt diese Gleichung, falls möglich (siehe Satz 22.3), nach $y(x)$ auf und zeige, dass (1) gilt.

Die genaue Formulierung gibt uns der folgende Satz :

Satz 22.3 :

Sei $(x_\circ; y_\circ) \in I \times J$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig mit* $g(y) \neq 0$ *auf* J.

Man setze

$$F(x) := \int_{x_\circ}^{x} f(t)dt, \ x \in I; \quad G(y) := \int_{y_\circ}^{y} \frac{dt}{g(t)}, \ y \in J$$

Sei $I' \subset I$ *ein Intervall mit* $x_\circ \in I'$ *und* $\boxed{F(I') \subset G(J).}$ $(*)$

Dann gibt es genau eine Lösung $\varphi : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ *von (1) mit* $\varphi(x_\circ) = y_\circ$.

Es gilt : $G\Big(\varphi(x)\Big) = F(x)$ *für alle* $x \in I'$.

Beweis :

beachte : G ist streng monoton : $G' = g$ und $g \neq 0$, somit ist $\varphi(x) = G^{-1}\Big(F(x)\Big)$

aus $(*)$ folgt $\operatorname{Bild} F \subset \operatorname{Def} G^{-1} = \operatorname{Bild} G$, so dass $G^{-1} \circ F$ Sinn macht.

$\longrightarrow$ genaueres siehe Übung!

$\square$

Beispiel :

$(*)$ $\boxed{y'(x) = y^2(x)}$

hier : $f(x) = 1,\; g(y) = y^2,\; (x,y) \in \mathbb{R}^2$

<u>gesucht</u> : Lösung φ von $(*)$ mit $\varphi(0) = c,\; c \in \mathbb{R}$

Rechte Seite $(x,y) \mapsto y^2$ genügt *lokaler Lipschitz Bedingung* auf $\mathbb{R}^2$

bzgl. der y-Variablen

$\overset{Satz 22.2}{\Longrightarrow}$ $\exists!$ Lösung φ lokal bei 0 definiert

(i) $c = 0$ $\overset{Satz 22.2}{\Longrightarrow}$ $\varphi \equiv 0$ eindeutige Lösung (klar!)

(ii) $c > 0$ $\Longrightarrow$ $\exists$ Intervall $I_\circ$ um 0 und $\varphi : I \to \mathbb{R}$

mit $\varphi(0) = c,\; \varphi'(x) = \varphi^2(x)$

<u>Annahme</u> : $\varphi(x) \leq 0$ für **ein** $x \in I_\circ$

$$\overset{\text{da } \varphi(0)>0}{\Longrightarrow} \quad \exists\, x_\circ \text{ mit } \varphi(x_\circ) = 0$$

$$\overset{\text{Eindeutigkeitssatz 22.1}}{\Longrightarrow} \quad \varphi = 0 \text{ auf } I_\circ\,! \quad \text{(Widerspruch!)}$$

Also : $\quad \varphi > 0$ auf $I_\circ$.

Wie groß ist $I_\circ$? Wie sieht φ aus ?

Man kann in 22.3 $J = (0, \infty)$ wählen,

$g(y) = y^2$ ist dort $\neq 0 \quad \Longrightarrow \quad G(y) = \int_c^y \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{c} - \frac{1}{y}$, $y \in J$;

$F(x) = \int\limits_0^x dt = x.$

Es gilt : $G(J) = (-\infty, 1/c)$

$\Longrightarrow I' := (-\infty, 1/c)$ erfüllt $F(I') \subset G(J)$.

Somit ist die Lösung φ auf $(-\infty, 1/c)$ definiert. Nun betrachte

$$G\Big(\varphi(x)\Big) = F(x) \iff \frac{1}{c} - \frac{1}{\varphi(x)} = x$$

$$\iff \underline{\varphi(x) = \frac{c}{1-cx}, \quad x \in (-\infty, 1/c).}$$

(iii) $c < 0$:

analog : $\varphi : (\frac{1}{c}, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{c}{1-cx}$ für $x > 1/c$.

□

Bemerkung :

Man sieht die Nützlichkeit von Satz 22.1 und Satz 22.2, da diese Sätze vorweg schon Informationen liefern.

2) Reduktion auf getrennte Veränderliche

(i) $\boxed{y'(x) = f\Big(a \cdot x + by(x) + c\Big)}$, $a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ b \neq 0,\ f :$ Intervall $\longrightarrow \mathbb{R}$

Setze $\boxed{v(x) := ax + by(x) + c}$

$$\Longrightarrow \quad v'(x) = a + bf\Big(v(x)\Big)$$

beachte : die Anfangsbedingungen für y müssen auch transformiert werden!

(ii) $\boxed{y'(x) = f\Big(y(x)\Big/x\Big)}$

Setze $\boxed{u(x) := y(x)\Big/x}$

$$\Longrightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{x^2}\Big(x \cdot y'(x) - y(x)\Big)$$
$$= \frac{1}{x} \cdot f(u(x)) - \frac{1}{x} \cdot u(x)$$
$$= \frac{1}{x}\Big(f(u(x)) - u(x)\Big)$$

Also $\quad u'(x) = A(x) \cdot B\Big(u(x)\Big)\,, \; A(x) := \frac{1}{x}, \; B(u) := f(u) - u$

Beispiel :

$y'(x) = 1 + \frac{1}{x}y(x) + \Big(\frac{1}{x}y(x)\Big)^2$ für $x > 0$ $\Big(f(u) := 1 + u + u^2\Big)$.

$$\overset{u(x)=y(x)/x}{\Longrightarrow} \quad u'(x) = \frac{1}{x}\Big(1 + u(x) + u(x)^2 - u(x)\Big)$$
$$= \frac{1}{x}\Big(1 + u^2(x)\Big)$$
$$\Rightarrow \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} = 1/x$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(\arctan u(x)\Big) = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\ln x$$

$$\Longrightarrow \quad u(x) = \tan\Big(c + \ln x\Big)$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{y(x) = x \cdot \tan\Big(x + \ln x\Big)}, \; x > 0.$$